ЛА 15.01.13

Да се построи по Грам-Шмид ортогонален базис на линейната обвивка на векторите $a_1=(1,-2,2,2)$, $a_2=(-1,9,-5,-5)$, $a_3=(1,5,-1,-1)$, $a_4=(1,12,-3,-5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 9 & -5 & -5 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 12 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & -5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1=(1,-2,2,2) \\ a_2=(-1,9,-5,-5) \\ a_4=(1,12,-3,-5) \end{matrix}\right\} \text{базис}$$

При Грам-Шмид в ЛЗС дава 0

$b_1 = a_1 = (1,-2,2,2)$

$b_2 = a_2 + \lambda b_1 \mid \cdot b_1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(a_2 b_1)}{(b_1 b_1)} \Rightarrow -\frac{-1-18-10-10}{1+4+4+4} = \frac{39}{13} = 3$

$b_2 = (-1,9,-5,-5) + (3,-6,6,6) = (2,3,1,1)$

$b_3 = a_4 + \mu b_1 + \lambda b_2 \mid \cdot b_1 \Rightarrow \mu = -\frac{(a_4 b_1)}{(b_1 b_1)} = -\frac{39}{13} = -3$

$\lambda = -\frac{(a_4 b_2)}{(b_2 b_2)} = -2 \Rightarrow b_3 = (1,12,-3,-5) + (3,-6,6,6) + (-4,-6,-2,-2) =$

$= (0,0,1,-1)$

Нека $V \in E\Pi$, $U \in \Pi\Pi$ на V. Ако $a \in V$ е ортогонален на всички вектори от U ще пишем $(a,U)=0$

Ако $U_1 \in V$ е множеството на всички вектори $a_1 \in U_1$ и е изпълнено $(a_1,U)=0$ ще пишем $(U_1,U)=0$

Опр:
Ортогонално допълнение на подпространството U наричаме

$$U^{\perp} = \{a \mid a \in V, (a,U)\}$$

(4)

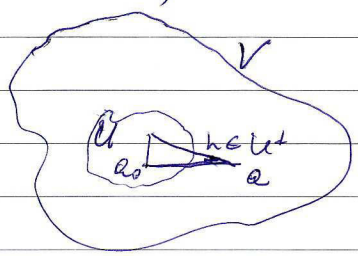
За $\forall \Pi U$ на $E\Pi V$ (крайномерно) е изпълнено $V = U \oplus U^{\perp}$

(2)

Ако $e_1 \dots e_k$ е ортонормирана базис на U, то той може да бъде допълнен до ортонормиран базис на V $e_1 = e_k, e_{k+1} \dots e_n$

$$(U^\perp)^\perp = U$$

Нека $a \in V$, тогава съществуват единствени вектори $a_0 \in U$, $h \in U^\perp$ такива че $a = a_0 + h$ вектора a_0 наричаме ортогонална проекция на a в U, а h - перпендикуляр спуснат от a към U



$\forall u \in U \quad |a - a_0| < |a - u|$

2.10 Нека U е линейната обвивка на векторите $a_1 = (1,2,0,1)$, $a_2 = (3,2,1,2)$, $a_3 = (1,-2,1,0)$. Да се намери ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp \Rightarrow (x, U) = 0$$

Искаме

$$(x, a_1) = 0, \quad (x, a_2) = 0, \quad (x, a_3) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-4} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

полагаме

$$x_2 = p, \quad x_4 = q \Rightarrow x_3 = 4p + q, \quad x_1 = -2p - q$$

$$e_1 = (-2, 1, 4, 0) \qquad e_2 = (1, 0, 1, 1)$$

(базис на ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U)

$$c_1 = e_1 \Rightarrow c_2 = e_2 + \lambda c_1 \Rightarrow \lambda = -\frac{(e_2 c_1)}{(c_1 c_1)} \Rightarrow$$

$$-\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$c_2 = (-1\,0\,1\,1) + \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, 0\right) = -\frac{1}{3}(1\,-2\,-5\,3)$$

$$|c_1| = \sqrt{(c_1 c_1)} = 3 \qquad , |c_2| = \left|\frac{1}{3}\right| \sqrt{39} = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

$$e_1 = \frac{1}{|c_1|} c_1 = \frac{1}{3}(-2, 1, 4, 0); \quad e_2 = \frac{1}{|c_2|} c_2 = \frac{\sqrt{39}}{39}(1, -2, -5, 3)$$

Грам-Шмидт

$a_1, a_2 \dots a_k$ са ЛНЗ то съществуват $e_1 \dots e_k$ такива че $(e_i, e_j) = 0 \quad i \neq j \quad \forall i = \overline{1, k}$

$$e_t \in \mathcal{L}(a_t, e_1 \dots e_{t-1})$$

$e_1 = a_1$

$e_2 = a_2 + \lambda_1 e_1 \;/ e_1 \Rightarrow 0 = (e_1 e_2) = (a_2 e_1) + \lambda_1 (e_1 e_1) \Rightarrow$

$$-(a_2 e_1) = \lambda_1 (e_1 e_1) \Rightarrow \lambda = -\frac{(a_2 e_1)}{(e_1 e_1)}$$

7.11 Нека U е пространството от решения на ХСЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$ Да се намери ортонормиран базис на ортогоналното допълнение $U^\perp$ на U

ФСР $\sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad x_3 = p, \; x_4 = q, \; x_2 = 3p + 4q, \; x_1 = -4p - 5q$$

$$U = \{(-4p - 5q, 3p + 4q, p, q) / p, q \in \mathbb{R}\}$$

$a_1 = (-4, 3, 1, 0), \quad a_2 = (-5, 4, 0, 1)$ } базис на $U \Rightarrow \mathcal{L}(a_1, a_2)$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp; \; (x, a_1) = 0 = (x, a_2)$

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 + 4x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x_1 = p, \; x_2 = q, \; x_3 = 4p - 3q, \; x_4 = 5p - 4q$$

$$U^\perp = \{(p, q, 4p - 3q, 5p - 4q) / p, q \in \mathbb{R}\}$$

$$b_1 = (1, 0, 4, 5) \qquad b_2 = (0, 1, -3, -4)$$

базис на $U^\perp$

Spree

Полагаме $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2 + \lambda_1 b_1$

$$\lambda_1 = -\frac{(b_2 b_1)}{(b_1 b_1)} = -\frac{-32}{42} = \frac{16}{21}$$

$$c_2 = (0,1,-3,-4) + \left(\frac{16}{21}, 0, 4\frac{16}{21}, 5\frac{16}{21}\right) =$$

$$\frac{1}{21}(16, 21, 1, -4) \qquad |c_1| = 4\sqrt{2}$$

$$|c_2| = \left|\frac{1}{21}\right| \sqrt{256 + 441 + 17} =$$

$$= \left|\frac{1}{21}\right| \sqrt{714}$$

$e_1 = (1,1,1,1)$ $\qquad e_2 = (2,3,-1,-2)$

$$U = \{u \mid u \in V, (u, e_1) = 0, (u, e_2) = 0\}$$
$$\ell(e_1, e_2) = U^\perp$$

$a \in \ell(e_1, e_2)$, $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$(a, u) = (e_1 e_1 + \lambda_2 e_2, u) = \underbrace{\lambda_1 (e_1, u) + \lambda_2 (e_2, u)}_{0} \Rightarrow a \in U^\perp$

4.12 Нека $U \in \mathbb{R}^4$ на векторите a_1, a_2, a_3, a_4 от ЕПВ и $a \in V$. Да се намерят ортогоналната проекция a_0 на a върху U както и перпендикулярът h от a към U

а) $a = (4,-1,-3,0)$, $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,2,2,-1)$, $a_3 = (1,0,0,3)$

$U = \ell(a_1, a_2, a_3)$ Знаем че $a_0 \in U$, $h \in U^\perp$ и $a = h + a_0$

$\Rightarrow h = a_0 - a$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$ a_1 и a_3 базис на U

$b_1 = a_1 \Rightarrow b_2 = a_3 + \lambda_1 b_1 \mid b_1$

$\lambda_1 = -\frac{(a_3 b_1)}{(b_1 b_1)} = -\frac{4}{4} = -1$ т.е.

$b_2 = (1,0,0,3) - (1,1,1,1) = (0,-1,-1,2)$

b_1, b_2 – ортогонален базис на U

$a_0 \in U \Rightarrow a_0 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2$

$h = a - \mu_1 b_1 - \mu_2 b_2 \quad / b_1$

$\underbrace{(h, b_1)}_{0} = (a, b_1) - \mu_1 (b_1, b_1) - \underbrace{\mu_2 (b_1, b_2)}_{0}$

$\mu_1 = \frac{(a, b_1)}{(b_1 b_1)} = \frac{4}{4} = 1$

$\mu_2 = \frac{(a, b_2)}{(b_2, b_2)} = \frac{12}{6} = 2$

$a_0 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = (1,1,1,1) + (0,-2,-2,4) = (1,-1,-1,5)$

$h = a - a_0 = (4,-1,-3,4) - (1,-1,-1,5) = (3,0,-2,-1)$

Нека $e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ е ортогонален базис на U

$(e_i, e_j) = 0, \; i \neq j$

$a_0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots \lambda_k e_k$ тогава

$h = a - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \dots - \lambda_k e_k \quad / \cdot e_1$

$(e_1 h) = 0 \Rightarrow (a_1 e_1) - \lambda_1 (e_1 e_1) - \underbrace{\dots - \lambda_k (e_k e_1)}_{0} = 0$ т.е.

$\lambda_1 = \frac{(a e_1)}{(e_1 e_1)}; \; \lambda_2 = \frac{(a e_2)}{(e_2 e_2)}; \; \dots; \; \lambda_k = \frac{(a e_k)}{(e_k e_k)}$

$a = (14, -3, -6, -7)$, $a_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a_2 = (1, 4, 3, 2)$, $a_3 = (2, 2, -2, -2)$

$a_4 = (-1, 13, 5, 18)$

$U = l(a_1 a_2 a_3 a_4)$ намираме базис

$$\begin{matrix} a_3 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 13 & 5 & 18 \\ -3 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix}$$ базис на U

намираме ортогонален базис на U

$b_2 = a_2$, $b_3 = a_3 + \lambda_2 b_2 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{(a b_2)}{(b_2 b_2)} = 0 \Rightarrow$

$b_3 = a_3$

$b_4 = a_4 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \quad / b_2$

$$\mu_2 = -\frac{(a_4 b_2)}{(b_2 b_2)} = -\frac{104}{30} = -\frac{52}{15}$$

$$\mu_3 = -\frac{(a_4 b_3)}{(b_3 b_3)} = -\frac{36}{5} \Rightarrow$$

$$b_4 = \frac{1}{15}(-15, 285, 75, 285) - (-52, -208, -156, -104) +$$

$$+ (-316, -316, 316, 316) =$$

$$\frac{1}{15}(-383, -323, 235, 497)$$

$h = a - a_0 \quad a_0 \in U \Rightarrow a_0 = \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$